

Билет 22

Покажите, что функция $(\frac{e^x/x^*}{x/x^*})^m (\frac{e^y/y^*}{y/y^*})^\alpha$ является первым интегралом для системы ОДУ Лотки-Вольтерра $\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$, $\frac{dy}{dt} = k\beta xy - my$, описывающей сосуществование хищников y и жертв x , где x^* , y^* - стационарное решение этой системы.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f_1(t, x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= f_2(t, x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{1}$$

Определение 1.

Первым интегралом нормальной системы (1) называется функция $F(t, x(t), y(t)) \equiv C$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой интегральной кривой системы (1).

Утверждение 1.

Функция $F(t, x(t), y(t)) \equiv C$ является первым интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы (1) равна нулю:

$$\left. \frac{dF}{dt}(t, x(t), y(t)) \right|_{(1)} = 0.$$

Система хищник-жертва. Размножение жертв ограничивается давлением на них со стороны хищников. Размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (количеством жертв):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k\beta xy - my.\end{aligned}\tag{2}$$

- $x(t)$ - численность жертв;
- $y(t)$ - численность хищников;
- α - коэффициент естественного прироста жертв;
- m - коэффициент естественной смертности хищников;
- $V(x) = \beta x$ - количество (биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k -я часть полученной биомассы энергии расходуется хищником на воспроизводство, остальное тратится на поддержание основного обмена и охотничьей активности. Функцию $V(x)$ обычно называют трофической функцией или функциональным откликом хищника на плотность популяции жертвы.

$x^* = \frac{m}{k\beta}$, $y^* = \alpha/\beta$ - стационарное решение системы (2) (проверяется подстановкой). Докажем, что функция $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha$, где $X = x/x^*$, $Y = y/y^*$ является первым интегралом системы (2). Продифференцируем эту функцию по t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha] &= m(\frac{e^X}{X})^{m-1} \cdot \frac{e^X \dot{X} X - e^X \dot{X}}{X^2} \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha + \alpha(\frac{e^Y}{Y})^{\alpha-1} \cdot \frac{e^Y \dot{Y} Y - e^Y \dot{Y}}{Y^2} \cdot (\frac{e^X}{X})^m = \\ &= (\frac{e^X}{X})^m \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha \cdot [m\dot{X}(1 - \frac{1}{X}) + \alpha\dot{Y}(1 - \frac{1}{Y})] = \underbrace{(\frac{e^X}{X})^m \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha}_A \cdot [m\dot{X} + \alpha\dot{Y} - (m\frac{\dot{X}}{X} + \alpha\frac{\dot{Y}}{Y})] = \\ &= \left\{ X = x/x^*, Y = y/y^*, x^* = \frac{m}{k\beta}, y^* = \alpha/\beta \right\} = A \cdot [\dot{x}k\beta - \dot{y}\beta - (m\frac{\dot{x}}{x} + \alpha\frac{\dot{y}}{y})] = \left\{ (2) \right\} = \\ &= A \cdot [k\beta(\alpha x - \beta xy) + \beta(k\beta xy - my) - (\alpha m - \beta my + \alpha k\beta x - \alpha m)] = \\ &= A \cdot [k\beta\alpha x - \beta my - (-\beta my + \alpha k\beta x)] = 0. \end{aligned}$$

Из утверждения 1 следует, что функция $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha$ является первым интегралом системы (2). Уравнение $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha = C$ описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, соответствующих фазовым траекториям периодических решений системы (2). Заметим, что при увеличении C амплитуды колебаний x и y возрастают (рисунок 1).

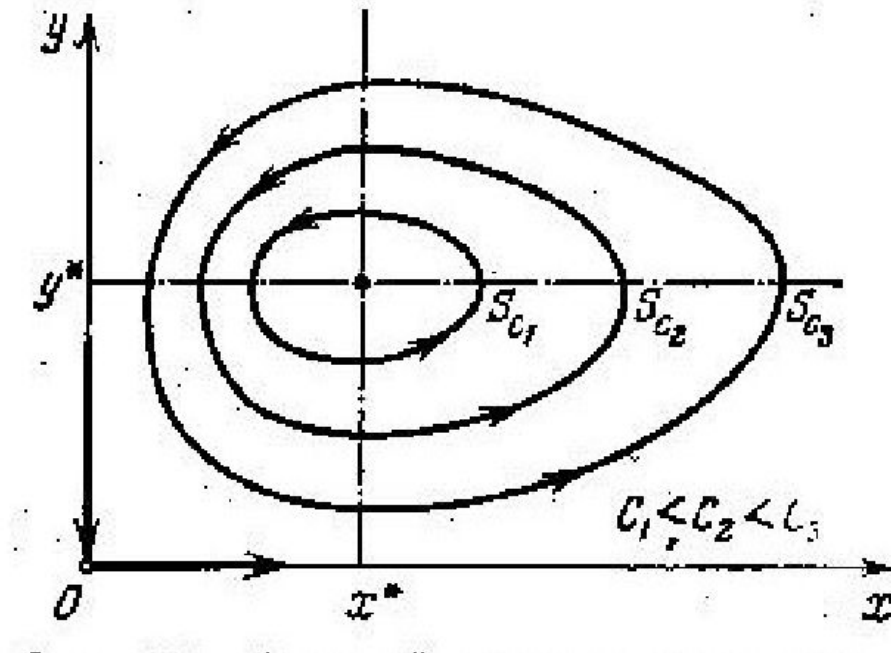


Рис. 1. Фазовый портрет